Corso di Laurea in Fisica, Analisi 1 19-20
Prof. Galise-Garroni-Pinzari-Ponsiglione-Siconolfi
Esercitazione 12

Esercizio 1 Si dimostri con un opportuno criterio che esiste l'integrale improprio

$$\int_1^{\infty} \frac{\log(x^2+4)}{x^2}\,dx$$

e successivamente lo si calcoli

Esercizio 2 Studiare i seguenti integrali

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{(\sin x)^q}{x}\,dx$$

al variare di p e q in $\mathbb{R}$

Esercizio 3 Si studino i seguenti integrali impropri

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)(x^2+1)}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{1}{x\log x}\,dx, \qquad \int_1^2 \frac{x^2}{x^3-8}\,dx, \qquad \int_{-1}^4 \frac{x}{x^2-9}\,dx$$

Esercizio 4 Si calcolino

$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x^2} e^{-t}\,dt, \qquad \lim_{xto+\infty} \frac{1}{x}\int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt.$$

Esercizio 5 Sia $f(x)$ una funzione continua definita in $[0,+\infty)$ ed intregrabile in senso improprio in $[0,+\infty)$, si calcoli per ogni $x>0$ la derivata di

$$F(x) = \int_x^{\infty} f(t)\,dt.$$

Esercizio 6 Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \dfrac{1}{x\,\ln^2 x} \\ y(e) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = (x+1)\,e^{-x} \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = (2x+1)\,\sin(3\,x) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 7 Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y' - y = 1 + t \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Esercizio 8 Determinare tutte le soluzioni delle seguenti equazioni

$$y'' + 3y' - 10y = 0, \qquad y'' - 4y' + 4y = 0, \qquad y'' - 2y' + 2y = 0.$$

Esercizio 9 Determinare la soluzione dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y'' + y' + y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Esercizio 10

1. L'integrale improprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x+2\sin x}{x^3+2\sqrt{x}}$ è divergente $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Risulta $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{e^{2x}-1}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{e+1}{e-1}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Sia $f : [0,+\infty) \mapsto \mathbb{R}$ una funzione continua.
L'integrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ non converge se $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Risulta $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\cos x}{x\log x} = -\infty$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 11 Si consideri l'equazione differenziale $\quad y'(t) + y(t) = f(t)$

1. Se $f(t) = 0$ esistono infinite soluzioni concave in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. Se $f(t) = 1$ non ci sono soluzioni limitate in $\mathbb{R}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Se $f(t) = t$ l'equazione ammette per soluzione un polinomio $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Se $f(t) = e^{-t}\sin^3 t$ la soluzione con dato iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = 0$ è $y(t) = e^{-t}\left(\frac{1}{3}\cos^3 t - \cos t\right)$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

Esercizio 12

1. Una soluzione dell'equazione differenziale $y'' - 3y' + 2y = 0$ è $y(t) = e^t - e^{2t}$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

2. La soluzione del problema
$$\begin{cases} y'' = y \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$$
è $y(t) = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

3. Esistono soluzioni dell'equazione $y'' - y = 0$ che verificano la condizione: $\displaystyle\inf_{t\in\mathbb{R}} y(t) = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$

4. Esiste una funzione non convessa che soddisfa l'equazione $y'' - (y')^2 = 0$ $\boxed{\text{V}}$ $\boxed{\text{F}}$